Université Ibn Khaldoun de Tiaret.
Faculté des Sciences de la nature et de la Vie.
Promotion:1^{ière} **année Master "**Agroalaimentaire et controle de qualité**".**

Corrigé type de l'examen en biostatistique 2

- Exercice 1

1. Un intervalle de confiance bélatère, au niveau 95%**,** de la proportion **p** :
Soit **F** le nombre de personnes atteintes dans l'echantillon de 1000 personnes, alors **F** est une variable alatoire suite la loi binomial $\mathbf{B(10^3;p)}$.
Comme $\mathbf{n} = 1000$ assez grand on peut utiliser l'approximation par la loi normal $N(10^3p; 10^3p(1-p))$.
La proportion $\mathbf{p_0} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{10^3}}$ est donc une variable alatoire suite la loi normal $\mathbf{N(p; \frac{p(1-p)}{10^3})}$ qui est implique que la variable alatoire $U = \frac{p_0-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{10^3}}}$ suite la loi normale centrée réduite $N(0;1)$.....(01point)
Au niveau 95% les valeurs de U tombent entre -1.96 et 1.96 c'est-à-dire

$$-1.96 < \frac{p_0 - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{10^3}}} < -1.96 \text{.....(0.5point)}$$

Alors

$$p_0 - 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{10^3}} < p < p_0 + 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{10^3}}$$

Mthode **1** : On utilise la majeure $p(1-p) < \frac{1}{4}$ alors IC bélatère, au niveau 95%, de p est $[0.266; 0.293]$ .....(01point)
Mthode **2** : On l'approximation $p \simeq p_0$ alors IC bélatère, au niveau 95%, de p est $[0.265; 0.294]$.
2. Un test d'hypothèse de: $\mathbf{H}_0$: $p = 0.3$ contre $\mathbf{H}_1$: $p \neq 0.3$.
Sous l'hypothèse $p = 0.3$ la variable aléatoire $U = \frac{p_0-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{10^3}}}$ suite la loi normale centrée réduite $N(0;1)$.....(0.5point)
Dans ce cas le test est Bilatéral donc la zone de l'acceptation de $\mathbf{H}_0$ est $\left[-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ et la zone de rejet est $\left]-\infty; -z_{\frac{\alpha}{2}}\right[\cup \left]z_{\frac{\alpha}{2}}; +\infty\right[$ .....(0.5point)
On sait que la v a U a 95% de chances de prendre des valeurs dans $]-1.96, 1.96]$ .....(0.5point)
La valeur observée de U est $U_{obs} = \frac{0.28-0.3}{\sqrt{\frac{0.3*0.7}{10^3}}} = -1.38$ qui est appartient à $]-1.96, 1.96]$. Donc on peut accepter l'hypothèse $\mathbf{H}_0$: $\mathbf{p = 0.3}$.....(01point)

- Exercice 2

1. Un intervalle de confiance bélatère, au niveau 95%**,** de l'espérance **m** :
Chaque mesure suit une loi normale d'espérance **m** et d'ecart-type $\sigma = \mathbf{0.2}$ (σ est connu) alors on utilise la variable aléatoire $Z = \frac{\overline{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}}$ qui suite la loi normale centrée réduite $N(0;1)$.....(0.5point)
Au niveau 95% les valeurs de Z tombent entre -1.96 et 1.96 c'est-à-dire

$$-1.96 < \frac{\overline{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} < -1.96 \text{.....(0.5point)}$$

Alors

$$\overline{X} - 1.96\sigma/\sqrt{n} < m < \overline{X} + 1.96\sigma/\sqrt{n}$$

$\overline{X}_{obs} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1578.6}{10} = 157.86$.....(01point)
IC bélatère, au niveau 95%, de m est $[157.73; 157.98]$ .....(01point).
2. Un test d'hypothèse de: $\mathbf{H}_0$: $\mathbf{m = 161}$ contre $\mathbf{H}_1$: $\mathbf{m \neq 161}$.
Sous l'hypothèse $m = 161$ la variable aléatoire $U = \frac{\overline{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}}$ suite la loi normale centrée réduite $N(0;1)$.....(0.5point)
Dans ce cas le test est Bilatéral donc la zone de l'acceptation de $\mathbf{H}_0$ est $\left]-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ et la zone de rejet est $\left]-\infty; -z_{\frac{\alpha}{2}}\right[\cup \left]z_{\frac{\alpha}{2}}; +\infty\right[$ .....(0.5point)
On sait que la v a U a 95% de chances de prendre des valeurs dans $]-1.96, 1.96]$
La valeur observée de U est $U_{obs} = \frac{\overline{X}_{obs}-161}{0.2/\sqrt{10}} = -4.964$ qui est n'appartient pas à $]-z_\alpha, z_\alpha]$.
On peut donc rejeter l'hypothèse $\mathbf{H}_0$: $\mathbf{m \neq 161}$ et on accepte l'hypothèse $\mathbf{H}_1$: $\mathbf{m \neq 161}$.....(01point

- Exercice 3

1. Un intervalle de confiance bélatère, au niveau 95%**,** de la moyenne de la proportion **A** :
Chaque mesure suit une loi normale d'espérance **m** et d'ecart-type σ (σ est inconnu) alors on utilise la variable aléatoire $T = \frac{\overline{X}-m}{\mathbf{S}/\sqrt{n}}$ qui suite la loi du Student à $n - 1 = 9$ degré de liberté.....(0.5point)
Au niveau 95% les valeurs de T tombent entre -2.26 et 2.26 c'est-à-dire

$$-2.26 < \frac{\overline{X} - m}{\mathbf{S}/\sqrt{n}} < -2.26 \text{.....(0.5point)}$$

Alors

$$\overline{X} - 2.26\frac{S}{\sqrt{n}} < m < \overline{X} + 2.26\frac{S}{\sqrt{n}}$$

$\overline{X}_{obs} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{244.5}{10} = 24.45$.....(01point)
$S^2_{obs} = \frac{\sum(x_i-\overline{X})^2}{n-1} = \frac{9.745}{9} = 1.082 \Longrightarrow \mathbf{S} = \sqrt{S^2_{obs}} = 1.04$.....(01point)
IC bélatère, au niveau 95%, de m est $[23.70; 25.19]$ .....(01point)
2. Un test d'hypothèse de: $\mathbf{H}_0$: $\mathbf{m \geq 25}$ contre $\mathbf{H}_1$: $\mathbf{m < 25}$.
Sous l'hypothèse $m = 25$ la variable aléatoire $U = \frac{\overline{X}-m}{\mathbf{S}/\sqrt{n}}$ suite la loi du Student à $n - 1 = 9$ degré de liberté.....(0.5point)
Dans ce cas le test est unilatéral donc la zone de l'acceptation de $\mathbf{H}_0$ est $]t_\alpha; +\infty[$ et la zone de rejet est $]-\infty, t_\alpha]$ .....(0.5point)
On sait que la v a U a 95% de chances de prendre des valeurs supérieures à $t_\alpha = -1.83$.....(0.5point
La valeur observée de U est $U_{obs} = \frac{\overline{X}_{obs}-25}{1.04/\sqrt{9}} = -0.167$ qui est bien supérieure à -1.83.
On peut donc accepter $\mathbf{H}_0$: $\mathbf{m \geq 25}$.....(01point)
3. Un intervalle de confiance bélatère, au niveau **95**%, de l'ecart- type de σ.
Comme l'espérance **m** est inconnue alors on utilise la variance empirique $S^2 = \frac{\sum(X_i-\overline{X})^2}{9}$
La variable aléatoire $9\frac{S^2}{\sigma^2}$suite la loi du χ^2_9 à 9 degré de liberté. .....(0.5point)
Elle a 95% de chances de prendre ses valeurs entre a et b définis par :

$$p(\chi^2_9 < a) = p(\chi^2_9 > b) = 0.025$$

La table numérique nous donne $a = 2.70$ et $b = 19.02$.....(0.5point)
Nous avons donc 95% de chances que $2.70 < 9\frac{S^2}{\sigma^2} < 19.02$ a savoir que:

$$S\sqrt{\frac{9}{19.02}} < \sigma < S\sqrt{\frac{9}{2.70}}\text{.....(0.5point)}$$

$$0.715 < \sigma < 1.89\text{.....(0.5point)}$$

4. Un test d'hypothèse $\mathbf{H}_0$: $\sigma = \mathbf{0.6}$ contre $\mathbf{H}_1$: $\sigma \neq \mathbf{0.6}$.
Toujours on utilise la variance empirique $S^2 = \frac{\sum(X_i - \overline{X})^2}{9}$ et la variable aléatoire $U = 9\frac{S^2}{\sigma^2}$ qui suite la loi du χ^2_9 à 9 degré de liberté.....(0.5 point)
Dans ce cas le test est Bilatéral, la zone de rejet de $\mathbf{H}_0$ est $]0, a[\cup]b; +\infty[$ et la zone de l'acceptation est $[a; b]$
La table numérique nous donne $p(\chi^2_9 < 2.7) = 0.025$,$p(\chi^2_9 > 19.02) = 0.025$ la zone de rejetde $\mathbf{H}_0$ est donc $]0, 2.70[\cup]19.02; +\infty[$ .....(0.5point)
La valeur observée $S^2_{obs} = 1.082$ conduit à La valeur observée de la variable de test $U_{obs} = 27.05$ qui située dans la zone de rejetde $\mathbf{H}_0$ Alors on peut affirmer que la machine est malle fonctioner fonctionner .....(0.5point)